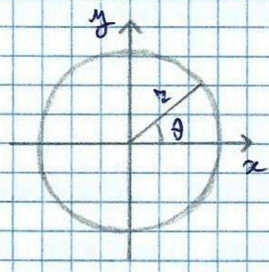
Risoluzione di problemi descritti dall'equazione di Laplace

Analizziamo la soluzione di alcuni problemi in cui è presente l'equazione di Laplace.

Esempio 1: il cerchio interno

Poniamoci nel piano e consideriamo un cerchio con condizioni di Dirichelet:



$$\begin{cases} \Delta\varphi(r,\theta) = \dfrac{\partial^2\varphi(r,\theta)}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^2\varphi(r,\theta)}{\partial\theta^2} = 0 \\ \varphi|_{\partial B} = \varphi(R,\theta) = f \end{cases}$$

È noto il valore di φ sulla circonferenza.

$0 \le r \le R$

Separazione delle variabili:

$$\varphi(r,\theta) = A(r)\cdot B(\theta) \Rightarrow A''(r)\cdot B(\theta) + \frac{1}{r}\cdot A'(r)\cdot B(\theta) + \frac{1}{r^2}\cdot A(r)\cdot B''(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow r^2\cdot\frac{A''(r)}{A(r)} + r\,\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B''(\theta)}{B(\theta)} = 0 \Rightarrow r^2\,\frac{A''(r)}{A(r)} + r\,\frac{A'(r)}{A(r)} = -\frac{B''(\theta)}{B(\theta)}$$

Le variabili sono ora separate e, per l'uguaglianza, i due membri non dipendono né da r, né da θ! Sono entrambi uguali a una costante:

$$r^2\cdot\frac{A''(r)}{A(r)} + r\,\frac{A'(r)}{A(r)} = -\frac{B''(\theta)}{B(\theta)} = c \Rightarrow \begin{cases} A''(r) + \dfrac{A'(r)}{r} - \dfrac{c}{r^2}A(r) = 0 \\ B''(\theta) + c\,B(\theta) = 0 \end{cases}$$

Consideriamo l'equazione con B discutendo i tre casi possibili:

- $c<0$, $c=-\lambda^2$:

$$B(\theta) = k_1 e^{-\lambda\theta} + k_2\cdot e^{\lambda\theta}$$

Non accettabile perché, data la configurazione circolare simmetrica del problema, la soluzione rispetto a $B(\theta)$ deve essere periodica, mentre l'esponenziale non lo è;

- $c=0$:

$$B''(\theta) = 0 \Rightarrow B'(\theta) = m \Rightarrow B(\theta) = m\theta + n$$

Tale soluzione è periodica solo se $m=0$. Rimane $B(\theta)=n$;

- $c>0$, $c=+\lambda^2$:

$$B(\theta) = a\cos(\lambda\theta) + b\,\mathrm{sen}(\lambda\theta)$$

Soluzione che, per periodicità, deve essere uguale a $B(\theta+2\pi)$:

$$B(\theta) = a\cos(\lambda\theta) + b\,\mathrm{sen}(\lambda\theta) = a\cos[\lambda(\theta+2\pi)] + b\,\mathrm{sen}[\lambda(\theta+2\pi)] = B(\theta+2\pi)$$

Si nota che l'uguaglianza è verificata solo se λ è intero, cioè $\lambda = n \in \mathbb{N}$, $c = n^2$. Pertanto:

$$B_n(\theta) = a_n\cos(n\theta) + b_n\,\mathrm{sen}(n\theta),\quad n=0,1,2,\ldots$$

È lo sviluppo di Fourier! Sostituendo $c = n^2$ nella prima equazione si ottiene un'equazione lineare del II ordine a coefficienti non costanti:

$$A''(r) + \frac{A'(r)}{r} - \frac{n^2}{r^2} \cdot A(r) = 0$$

Tentiamo con $A(r) = r^\lambda \Rightarrow A'(r) = \lambda r^{\lambda-1} \Rightarrow A''(r) = \lambda(\lambda-1) \cdot r^{\lambda-2}$:

$$\lambda(\lambda-1) r^{\lambda-2} + \frac{1}{r} \lambda r^{\lambda-1} - \frac{n^2}{r^2} r^\lambda = 0 \Rightarrow r^{\lambda-2}\left[\lambda(\lambda-1) + \lambda - n^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow r^{\lambda-2}(\lambda^2 - n^2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 = n^2 \Rightarrow \lambda = \pm n$$

La soluzione è quindi:

$$A_n(r) = c_n \cdot r^n + d_n \cdot r^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Per $n=0$ le due funzioni r^n e r^{-n} coincidono. Abbiamo risolvere a parte tale caso, ripartendo dall'equazione iniziale in $A(r)$:

$$A''(r) + \frac{1}{r} \cdot A'(r) = 0, \text{ detto } u(r) = A'(r) \Rightarrow u'(r) = -\frac{u(r)}{r} \Rightarrow \frac{du}{dr} = -\frac{u}{r}$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\int \frac{dr}{r} \Rightarrow \ln u = -\ln r + c_0 \Rightarrow u = e^{-\ln r} \cdot e^{c_0}$$

$$\Rightarrow u = e^{c_0} \cdot e^{\ln(1/r)} \Rightarrow u(r) = c_0/r = A'(r) \Rightarrow A(r) = c_0 \ln r + \tilde{c}_0$$

Ecco la soluzione completa:

$$A_0(r) = \tilde{c}_0 + c_0 \ln r \qquad A_n(r) = c_n r^n + \frac{d_n}{r^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$B_n(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow \varphi_n(r,\theta) = (\tilde{c}_0 + c_0 \ln r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right]\left(c_n r^n + \frac{d_n}{r^n}\right)$$

Abbiamo estratto dalla sommatoria il termine per $n=0$ inglobando il coefficiente a_0 (che rimane dopo la sostituzione di tale valore di n) nell'espressione di $A(r)$ ($\tilde{c}_0 a_0 \to \tilde{c}_0$ e $c_0 a_0 \to c_0$). La funzione φ, che rappresenta un potenziale, deve essere applicabile anche nell'origine, cioè nel centro del cerchio. Pertanto poniamo $c_0 = 0$ e $d_n = 0$, in modo da escludere i termini divergenti. Quindi, rinominando $c_n a_n \to a_n$, $c_n b_n \to b_n$ e $\tilde{c}_0 = \frac{a_0}{2}$, si ottiene:

$$\varphi(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right]$$

$$\Rightarrow \varphi(R,\theta) = f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot R^n)\cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n R^n)\sin(n\theta)$$

Abbiamo ottenuto lo sviluppo in serie di Fourier in cui:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) \cdot d\theta \qquad a_n R^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta \quad b_n R^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta$$

Perciò:

$$\varphi(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tilde{\theta})\,d\tilde{\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[\frac{\cos(n\theta)}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} f(\tilde{\theta}) \cdot \cos(n\tilde{\theta})\,d\tilde{\theta} + \frac{\sin(n\theta)}{\pi R^n} \cdot \int_0^{2\pi} f(\tilde{\theta}) \sin(n\tilde{\theta})\,d\tilde{\theta}\right]$$

La funzione f è continua in un cerchio (chiuso e limitato), quindi ammette massimo e minimo. Pertanto è maggiorabile e il suo integrale converge. Possiamo allora "invertire" la sommatoria con l'integrale e scrivere tutto in un uni

Co integrale:

$$\varphi(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tilde\theta)\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^m\left(\cos(m\theta)\cos(m\tilde\theta)+\operatorname{sen}(m\theta)\operatorname{sen}(m\tilde\theta)\right)\right]d\tilde\theta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tilde\theta)\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^m\cos(m\theta-m\tilde\theta)\right]d\tilde\theta$$

Passiamo agli esponenziali complessi e poniamo $t=r/R$:

$$\varphi(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tilde\theta)\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2}t^m\left[e^{im(\theta-\tilde\theta)}+e^{-im(\theta-\tilde\theta)}\right]\right]d\tilde\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tilde\theta)\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\left[t\cdot e^{i(\theta-\tilde\theta)}\right]^m+\sum_{m=1}^{\infty}\left[t e^{-i(\theta-\tilde\theta)}\right]^m\right\}d\tilde\theta$$

Poste $X=t\cdot e^{i(\theta-\tilde\theta)}$ e $Y=t\cdot e^{-i(\theta-\tilde\theta)}$ si ottiene:

$$\varphi(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tilde\theta)\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}X^m+\sum_{m=1}^{\infty}Y^m\right]d\tilde\theta$$

Recuperiamo la serie geometrica:

$$S=\sum_{m=1}^{\infty}x^m=x+x^2+x^3\dots;\quad S_N=\sum_{m=1}^{N}x^m=x+x^2+\dots+x^N;\quad S_{N+1}=\sum_{m=1}^{N+1}x^m=x+x^2+\dots+x^N+x^{N+1}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}S_{N+1}=S_N+x^{N+1}\\ xS_N=S_{N+1}-x\end{cases}\Rightarrow xS_N=S_N+x^{N+1}-x\Rightarrow(x-1)S_N=x^{N+1}-x\Rightarrow S_N=\frac{x^{N+1}-x}{x-1}$$

Eseguiamo il limite per $N\to\infty$:

$$S=\lim_{N\to\infty}\frac{x^{N+1}-x}{x-1}=-\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x-1}\lim_{N\to\infty}x^{N+1}=\begin{cases}\infty & \text{se } |x|>1\\ \frac{x}{1-x} & \text{se } |x|<1\\ \infty & \text{se } x=1\end{cases}$$

Riconosciamo nel nostro caso la serie geometrica con $|x|=\left|\frac{r}{R}e^{i(\theta-\tilde\theta)}\right|<1$:

$$\varphi(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tilde\theta)\left[1+\frac{X}{1-X}+\frac{Y}{1-Y}\right]d\tilde\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tilde\theta)\left[1+\frac{t\cdot e^{i(\theta-\tilde\theta)}}{1-t\cdot e^{i(\theta-\tilde\theta)}}+\frac{t\cdot e^{-i(\theta-\tilde\theta)}}{1-t\cdot e^{-i(\theta-\tilde\theta)}}\right]d\tilde\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tilde\theta)\left[\frac{1-\cancel{te^{i(\theta-\tilde\theta)}}-\cancel{te^{-i(\theta-\tilde\theta)}}+\cancel{t^2}+\cancel{te^{i(\theta-\tilde\theta)}}-t^2+\cancel{te^{-i(\theta-\tilde\theta)}}-\cancel{t^2}}{(1-te^{i(\theta-\tilde\theta)})(1-te^{-i(\theta-\tilde\theta)})}\right]d\tilde\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tilde\theta)\left[\frac{1-t^2}{1+t^2-2t\cos(\theta-\tilde\theta)}\right]d\tilde\theta$$

Abbiamo sostituito, a denominatore, il coseno in forma di Eulero $\frac{e^{i(\theta-\tilde\theta)}-e^{-i(\theta-\tilde\theta)}}{2}=\cos(\theta-\tilde\theta)$. Risostituendo $t=r/R$ si ottiene:

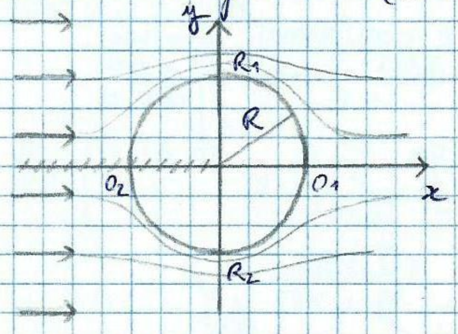
$$\varphi(r,\theta)=\frac{\left[1-(r/R)^2\right]}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{f(\tilde\theta)}{1+(r/R)^2-2\frac{r}{R}\cos(\theta-\tilde\theta)}\cdot d\tilde\theta$$

Formula non valida per $r=0$ e $r=R$, ma tale per cui esista il limite:

$$\lim_{r\to R^-}\varphi(r,\theta)=f(\theta)$$

Esempio 2: cerchio esterno - caso idrodinamico

Consideriamo nuovamente il cerchio, ma guardiamolo questa volta dall'esterno. Immaginiamo sia la pila di un ponte investita da fluido (ovviamente, una sezione della pila):



Le ipotesi sul fluido sono l'incomprimibilità, $\operatorname{div} \underline{v} = 0$, e l'assenza di vorticità, $\operatorname{rot} \underline{v} = \underline{0}$. Per quest'ultima condizione abbiamo escluso il semiasse negativo delle x: in tal modo il dominio non è semplicemente connesso.

Abbiamo un problema di Neumann poiché il flusso interno al cerchio è nullo:

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0, & r \geq R \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial r}(R,\theta) = 0 \\ \lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = u_0 \\ \lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

u_0 è la velocità del fiume a grande distanza dalla pila.

La soluzione del problema è definita a meno di una costante, cioè φ è unico a meno di $c \in \mathbb{R}$. Tuttavia ci interessa $\underline{v} = \nabla \varphi$: derivando la costante sparisce e il vettore velocità ottenuto è unico.

Torniamo alla soluzione ottenuta nell'esempio precedente e, basandoci sul problema fisico, vediamo quali termini possono essere eliminati:

$$\varphi(r,\theta) = (c_0 + \tilde{c}_0 \ln r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta)\right]\left(c_n r^n + \frac{d_n}{r^n}\right) =$$

$$= c_0 + \tilde{c}_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta)\left(a_n r^n + \frac{\tilde{a}_n}{r^n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n\theta)\left(b_n r^n + \frac{\tilde{b}_n}{r^n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\tilde{c}_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta)\left(a_n n r^{n-1} - n \tilde{a}_n r^{-n-1}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n\theta)\left(b_n n r^{n-1} - n \tilde{b}_n r^{-n-1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial r}(R,\theta) = \frac{\tilde{c}_0}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta)\left(a_n R^{n-1} - \tilde{a}_n R^{-n-1}\right) n + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n\theta)\left(b_n R^{n-1} - \frac{\tilde{b}_n}{R^{n+1}}\right) = 0$$

Per le condizioni al contorno ogni termine deve essere nullo:

$$\tilde{c}_0 = 0 \qquad a_n = \tilde{a}_n \cdot \frac{1}{R^{n+1}} \cdot \frac{1}{R^{n-1}} = \frac{\tilde{a}_n}{R^{2n}} \qquad b_n = \frac{\tilde{b}_n}{R^{n+1}} \cdot \frac{1}{R^{n-1}} = \frac{\tilde{b}_n}{R^{2n}}$$

$$\Rightarrow \varphi(r,\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta)\, \tilde{a}_n \left(\frac{r^n}{R^{2n}} + \frac{1}{r^n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n\theta)\, \tilde{b}_n \left(\frac{r^n}{R^{2n}} + \frac{1}{r^n}\right)$$

Per poter imporre le condizioni asintotiche dobbiamo studiare le derivate in relazione alle coordinate polari:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}(y/x) \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}_{v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Abbiamo quindi:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\frac{x}{r}=\cos\theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\,2y=\frac{y}{r}=\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}(y/x)=\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(-y/x^2\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{y}{r^2}=-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{arctg}(y/x)=\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x}{r^2}=\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}\cdot\cos\theta-\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r}\\[2mm] \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}\cdot\operatorname{sen}\theta+\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta}\cdot\dfrac{\cos\theta}{r}\end{cases}$$

Eseguiamo le derivate:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\cos\theta\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\theta)\cdot\tilde a_n\left[\frac{n r^{n-1}}{R^{2n}}-\frac{n}{r^{n+1}}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}(n\theta)\cdot\tilde b_n\left[\frac{n r^{n-1}}{R^{2n}}-\frac{n}{r^{n+1}}\right]\right\}+$$
$$-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(-n)\operatorname{sen}(n\theta)\,\tilde a_n\left[\frac{r^n}{R^{2n}}+\frac{1}{r^n}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}n\cos(n\theta)\,\tilde b_n\left[\frac{r^n}{R^{2n}}+\frac{1}{r^n}\right]\right\}$$

Per $r\to\infty$ il limite deve convergere a u_0. Mentre r^n e r^{n+1} a denominatore non danno problemi, la r^{n-1} a numeratore è accettabile solo se $n=1$, quindi:

$$\varphi(r,\theta)=c_0+\cos\theta\,\tilde a_1\left(\frac{r}{R^2}+\frac{1}{r}\right)+\operatorname{sen}\theta\,\tilde b_1\left(\frac{r}{R^2}+\frac{1}{r}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\cos\theta\left[\cos\theta\,\tilde a_1\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{r^2}\right)+\operatorname{sen}\theta\,\tilde b_1\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{r^2}\right)\right]+$$
$$-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\left[-\operatorname{sen}\theta\,\tilde a_1\left(\frac{r}{R^2}+\frac{1}{r}\right)+\cos\theta\left(\frac{r}{R^2}+\frac{1}{r}\right)\right]=$$
$$=\cos^2\theta\,\tilde a_1\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{r^2}\right)+\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\tilde b_1\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{r^2}\right)+\operatorname{sen}^2\theta\,\tilde a_1\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}\right)-\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\tilde b_1\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}\right)$$

Eseguiamo il limite:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\tilde a_1\frac{\cos^2\theta}{R^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R^2}\tilde a_1=\frac{\tilde a_1}{R^2}=u_0\Rightarrow\tilde a_1=u_0R^2$$

Passiamo all'altra derivata e facciamone il limite:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\tilde a_1\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{r^2}\right)+\operatorname{sen}^2\theta\,\tilde b_1\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{r^2}\right)-\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\tilde a_1\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}\right)+\cos^2\theta\,\tilde b_1\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow\lim_{r\to\infty}\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R^2}\tilde b_1+\frac{\cos^2\theta}{R^2}\tilde b_1=\frac{\tilde b_1}{R^2}=0\Rightarrow\tilde b_1=0$$

Ne segue che $\varphi(r,\theta)=c_0+\cos\theta\left(\frac{r}{R^2}+\frac{1}{r}\right)\cdot u_0R^2$, da cui derivano le velocità:

$$\begin{cases}v_r=u_0R^2\cos\theta\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{r^2}\right)\\ v_\theta=-u_0R^2\operatorname{sen}\theta\left(\frac{r}{R^2}+\frac{1}{r}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_x=u_0R^2\cos^2\theta\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{r^2}\right)+u_0R^2\operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}\right)=u_0-u_0\frac{R^2}{r^2}\cos(2\theta)\\ v_y=u_0R^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{r^2}\right)-u_0R^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}\right)=-u_0\frac{R^2}{r^2}\operatorname{sen}(2\theta)\end{cases}$$

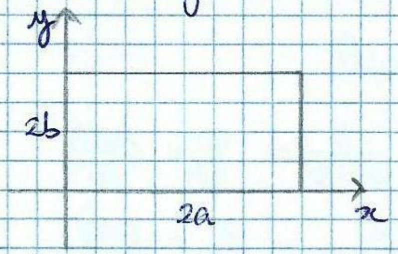
Controlli:

$$\lim_{r\to\infty}v_x=u_0\qquad\lim_{r\to\infty}v_y=0\qquad v_r\big|_R=u_0R^2\cos\theta\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{R^2}\right)=0$$

Riferendoci al grafico iniziale, in O_1 e O_2 ($\theta=0,\pi;\ r=R$) l'acqua è ferma, in R_1 e R_2 la velocità tangenziale raddoppia per effetto venturi: $v_\theta(R,\pi/2)=-2u_0$ e $v_\theta(R,-\pi/2)=2u_0$ (il segno meno tiene conto del verso della rotazione, positiva se antioraria).

Esempio 3: rettangolo

Cambiamo geometria e passiamo al problema misto:



$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \text{I} \quad \varphi(x,0) = 0 \\ \text{II} \quad \varphi(0,y) = 0 \\ \text{III} \quad \varphi(x,2b) = 0 \\ \text{IV} \quad \varphi(2a,y) = f(y) \end{cases} \qquad \text{con: } \begin{cases} f(2b) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Usiamo la serie di Fourier con solo il seno dato che, considerando rette verticali che intersechino il rettangolo, si "parte" da zero ($\varphi(x,0)=0$) e si "arriva" di nuovo in zero ($\varphi(x,2b)=0$):

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot b_n(x) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot b_n''(x) \\ \varphi_{,yy} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot b_n(x) \end{cases}$$

I e III condizioni già verificate

$$\Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left[b_n''(x) - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 b_n(x) \right] = 0$$

La soluzione dell'equazione differenziale $b_n''(x) - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 b_n(x) = 0$ è:

$$b_n(x) = \alpha_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + \beta_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right)$$

Pertanto la φ è:

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left[\alpha_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + \beta_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \right]$$

Dobbiamo tuttavia rispettare la II condizione che impone:

$$\varphi(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \alpha_n = 0 \Rightarrow \alpha_n = 0 \Rightarrow \varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot \beta_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right)$$

Verifichiamo la condizione IV:

$$\varphi(2a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \beta_n \operatorname{senh}\left(\frac{2an\pi}{b}\right) = f(y)$$

Possiamo quindi ricavare β_n come coefficiente di Fourier:

$$\beta_n \operatorname{senh}\left(\frac{2an\pi}{b}\right) = \frac{1}{b} \cdot \int_0^{2b} f(y) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

Quindi:

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \cdot \frac{1}{b \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{2\pi n a}{b}\right)} \int_0^{2b} f(\tilde{y}) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \tilde{y}}{b}\right) d\tilde{y}$$